

VISIT...

LANZAROTE  
*Caliente*.COM

Математический способ мышления  
(выступление на конференции, посвященной 200-летию Пенсильванского университета 17.09.1940 г.)  
Г. Вейль

Источник сканирования: Вейль Г. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ МЫШЛЕНИЯ (под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина; пер. с англ. Ю.А. Данилова). - М.: Наука, 1989. - стр. 6-24; первоисточник: "Science", 1940, V. 92, P. 437-446; H. Weil/Gesammelte Abhandlungen - Berlin, 1968)

Под математическим способом мышления я понимаю, во-первых, особую форму рассуждений, посредством которых математика проникает в науки о внешнем мире - в физику, химию, биологию, экономику и т.д. и даже в наши размышления о повседневных делах и заботах, и, во-вторых, ту форму рассуждений, к которой прибегает в своей собственной области математик, будучи предоставленным самому себе. В процессе мышления мы пытаемся постичь разумом истину; наш разум стремится просветить себя, исходя из своего опыта. Поэтому, подобно самой истине и опыту, мышление по своему характеру есть нечто довольно однородное и универсальное. Влекомое глубочайшим внутренним светом, оно не сводится к набору механически применяемых правил и не может быть разделено водонепроницаемыми переборками на такие отсеки, как мышление историческое, философское, математическое и другое. Мы, математики, не ку-клукс-клан с неким тайным ритуалом мышления. Правда, существуют - скорее внешне - некоторые специфические особенности и различия; так, например, процедуры установления фактов в зале суда и в физической лаборатории заметно различаются. Тем не менее, вряд ли можно ожидать от меня, что математический способ мышления я опишу более ясно, чем, скажем, можно описать демократический образ жизни.

Движение за реформу преподавания математики, совершившее несколько десятилетий назад подлинный переворот в Германии<sup>1</sup>, где во главе него стоял великий математик Феликс Клейн, выдвинуло в качестве своего лозунга "функциональное мышление". Как провозгласили реформаторы, самое важное из того, чему должен научиться средний образованный человек, пройдя обучение математике, - это умение мыслить в терминах переменных и функций. Функция описывает зависимость одной переменной  $y$  от другой переменной  $x$  или, говоря более общо, отображает одно множество - область значений переменного элемента  $x$  - на другое (или то же самое) множество. Понятие функции, или отображения, - несомненно одно из самых фундаментальных понятий, и оно встречается в математике на каждом шагу как в теории, так и в приложениях.

Федеральный закон США о подоходном налоге устанавливает налог  $y$  в зависимости от дохода  $x$ ; делает он это довольно неуклюже, "склеивая" одну за другой несколько линейных функций, каждая из которых действует в пределах своего интервала изменений дохода - группы налогоплательщиков по доходу. Археолог, который через пять тысяч лет обнаружит в раскопе наши декларации о доходах вместе с руинами инженерных сооружений и математическими книгами, вероятно, датирует их двумя столетиями раньше, наверняка отнеся ко временам до Галилея и Виета. Виет способствовал введению адекватной алгебраической символики, Галилей открыл квадратичный закон свободного падения тел, гласящий, что

# Математический способ мышления

(выступление на  
конференции, посвященной  
200-летию Пенсильванского  
университета 17.09.1940  
г.)

Г. Вейль

Источник сканирования:  
Вейль Г. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ  
СПОСОБ МЫШЛЕНИЯ (под ред.

Б.В. Бирюкова и А.Н.  
Паршина; пер. с англ. Ю.А.  
Данилова). - М.: Наука,  
1989. -стр. 6-24;  
первоисточник: "Science",  
1940, V. 92, P. 437-446; Н.  
Weil Gesammelte Abhandlungen  
- Berlin, 1968)

Под математическим  
способом мышления я  
понимаю, во-первых, особую  
форму рассуждений,  
посредством которых

математика проникает в науки о внешнем мире – в физику, химию, биологию, экономику и т.д. и даже в наши размышления о повседневных делах и заботах, и, во-вторых, ту форму рассуждений, к которой прибегает в своей собственной области математик, будучи предоставленным самому себе. В процессе мышления мы пытаемся постичь разумом истину; наш разум стремится просветить себя, исходя из своего опыта.

Поэтому, подобно самой истине и опыту, мышление по своему характеру есть нечто довольно однородное и универсальное. Влекомое глубочайшим внутренним светом, оно не сводится к набору механически применяемых правил и не может быть разделено водонепроницаемыми переборками на такие отсеки, как мышление историческое, философское, математическое и другое. Мы, математики, не ку-клукс-клан с неким тайным

ритуалом мышления. Правда, существуют – скорее внешне – некоторые специфические особенности и различия; так, например, процедуры установления фактов в зале суда и в физической лаборатории заметно различаются. Тем не менее, вряд ли можно ожидать от меня, что математический способ мышления я опишу более ясно, чем, скажем, можно описать демократический образ жизни.

Движение за реформу  
преподавания математики,  
совершившее несколько  
десятилетий назад  
подлинный переворот в  
Германии<sup>1</sup>, где во главе  
него стоял великий  
математик Феликс Клейн,  
выдвинуло в качестве  
своего лозунга  
"функциональное мышление".  
Как провозгласили  
реформаторы, самое важное  
из того, чему должен  
научиться средний  
образованный человек,  
пройдя обучение



математике, – это умение мыслить в терминах переменных и функций. Функция описывает зависимость одной переменной  $y$  от другой переменной  $x$  или, говоря более общо, отображает одно множество – область значений переменного элемента  $x$  – на другое (или то же самое) множество. Понятие функции, или отображения, – несомненно одно из самых фундаментальных понятий, и оно встречается в

математике на каждом шагу как в теории, так и в приложениях.

Федеральный закон США о подоходном налоге устанавливает налог  $y$  в зависимости от дохода  $x$ ; делает он это довольно неуклюже, "склеивая" одну за другой несколько линейных функций, каждая из которых действует в пределах своего интервала изменений дохода – группы налогоплательщиков по доходу. Археолог, который

через пять тысяч лет  
обнаружит в раскопе наши  
декларации о доходах  
вместе с руинами  
инженерных сооружений и  
математическими книгами,  
вероятно, датирует их  
двумя столетиями раньше,  
наверняка отнеся ко  
временам до Галилея и  
Виета. Виет способствовал  
введению адекватной  
алгебраической символики,  
Галилей открыл  
квадратичный закон  
свободного падения тел,  
гласящий, что расстояние

s, проходимое в пустоте свободно падающим телом, пропорционально квадрату времени t, истекшего с начала падения:

$$s = 1/2 \ g \ t^2,$$

(1)

где g – константа, имеющая одно и то же значение для любого тела в данном месте. Установив формулу (1), Галилей превратил

закон природы, присущий  
реальному движению тел, в  
некоторую математическую  
функцию, построенную  
a priori, и это то, что  
физика стремится проделать  
с каждым явлением. Закон  
свободного падения тел  
"спроектирован" гораздо  
лучше, чем наши законы о  
налогах. Его "проект"  
создан самой Природой,  
которая составляет свои  
планы, тонко ощущая  
математическую простоту и  
гармонию. К тому же  
Природа, в отличие от

законов о налогах на доходы и сверхприбыли, не ограничена требованием быть понятной юристам и членам торговой палаты.

С самого начала мы сталкиваемся со следующими характерными чертами любой математической процедуры:

1) наличием переменных, подобных  $t$  и  $s$  в формуле (1), допустимые значения которых принадлежат некоторой области (в случае свободного падения – области действительных

чисел), вполне обозримой, поскольку своим происхождением она обязана нашему же построению; 2) представлением этих переменных с помощью знаков; 3) наличием функций или *apriori* построенных отображений области значений одной переменной  $t$  на область значений другой переменной  $s$ . Время есть независимая переменная "katexochen" [первое, что бросается в глаза - греч.] .

При изучении функции необходимо следить за тем, чтобы независимая переменная пробегала всю область своих допустимых значений. Прежде чем подвергать проверке правильность любого предложения относительно зависимости между теми или иными величинами в природе, мы можем мысленно, еще до его сравнения с экспериментальными данными, проверить, покрывает ли оно всю



область допустимых значений независимых переменных. Иногда неприемлемость предполагаемой зависимости сразу проявляется в некоторых простых предельных случаях. Лейбниц, сформулировав свой принцип непрерывности, учил нас рассматривать покой не как противоположность движения а как ею предельный случай. Исходя из непрерывности, Лейбниц сумел *apriori* опровергнуть

предложенные Декартом  
законы соударения тел<sup>3</sup>.  
Мах дает следующую  
рекомендацию: "Составив  
определенное заключение на  
основании одного  
конкретного случая,  
надлежит постепенно и как  
можно шире модифицировать  
сопутствующие ему  
обстоятельства, стремясь,  
насколько это возможно,  
остаться при  
первоначальном заключении.  
Не существует иного  
способа, который с большей  
надежностью и меньшими

умственными усилиями  
приводил бы к простейшему  
объяснению всех явлений  
природы" 4. Большинство  
переменных, с которыми нам  
приходится иметь дело при  
анализе явлений природы, –  
непрерывные переменные,  
такие, как время, но хотя  
непрерывность интуитивно и  
подразумевается в слове  
"переменная",  
математическое понятие  
переменной отнюдь не  
ограничено непрерывным  
случаем. Наиболее важный  
пример дискретной

переменной дает нам последовательность натуральных, или целых положительных, чисел 1, 2, 3, ... Так, число делителей любого целого числа и есть функция аргумента  $n$ .

В логике Аристотеля переход от единичного к общему совершается путем выявления у данного объекта определенных абстрактных свойств и отбрасывания остальных, так что два объекта

подпадают под одно и то же понятие или принадлежат к одному и тому же роду, если оба они обладают выделенными свойствами (features). Такого рода описательная классификация, например, описание растений в ботанике и животных в зоологии, ориентирована на реально существующие объекты. Можно сказать, что Аристотель мыслит в терминах субстанции и акциденции, в то время как идея функции господствует

при формировании математических понятий (concepts). Возьмем, например, понятие (notion) эллипса. Любой эллипс на плоскости  $\chi$  есть множество  $E$  точек  $(x, y)$ , заданное квадратным уравнением

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1,$$

коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  которого удовлетворяют условиям:  $a > 0$ ,  $c > 0$ ,  $ac^2 - b^2 > 0$ ,

Множество  $E$  зависит от коэффициентов  $a, b, c$  мы получаем некоторую функцию  $E(a, b, c)$ , порождающую конкретный эллипс, если переменным коэффициентам  $a, b, c$  придадим определенные значения. Переход от конкретного эллипса к соответствующему общему понятию не требует отбрасывания каких-либо специфических различий, он совершается благодаря тому, что некоторые характеристики (в нашем примере они представлены

коэффициентами)  
превращаются в переменные,  
область значений которых  
a priori обозрима (у нас  
она задана приведенными  
выше неравенствами). Таким  
образом, общее понятие  
распространяется скорее на  
все возможные, чем на все  
актуально существующие  
характеристики [ср. в этой  
связи статью:  
Cassirer Ernst.  
Substanzbegriff und Funktion  
- 1910 и мою критическую  
заметку: Weil H.  
Philosophie der Mathematik und



- 1923. - С. 111; здесь  
речь идет о двух возможных  
способах образования  
понятий, первый из которых  
- "объемный", или  
"теретико-множественный" -  
восходит к Аристотелю  
("общее" получается путем  
собирания в одно множество  
всех частных случаев), а  
второй - восходящий к  
Платону - представляет  
собой обратный процесс от  
"общего" к "частному",  
например, платоновскую  
процедуру "диарезиса"  
(разделения надвое), или

нисхождение от  
абстрактного задания  
переменных к их частной  
конкретизации – К.С.] 5.

После этих предварительных  
замечаний относительно  
функционального мышления я  
перехожу теперь к более  
систематической  
аргументации. Математика  
снискала дурную славу из-  
за разреженного воздуха  
абстракций, в котором она  
живет. Скверная репутация  
заслужена математикой лишь  
наполовину. В самом деле,

первая трудность, с которой сталкивается человек с улицы, когда его пытаются научить мыслить математически, состоит в том, что ему необходимо усвоить более прямой взгляд на вещи; его вера в слова должна быть поколеблена; ему необходимо научиться мыслить более конкретно и направленно. "Высота" – слово, имеющее вполне ясное значение, когда я спрашиваю, как высок потолок в этой комнате, –

каково расстояние от пола до потолка. Значение этого слова становится все менее определенным, если мы станем применять его к относительной высоте горных вершин, расположенных на все более обширной территории. Его значение станет совсем зыбким и растворится в воздухе, если мы распространим его на весь земной шар, не подкрепив динамическим понятием потенциала. Потенциал более конкретен, чем

высота, поскольку порожден распределением масс в земном шаре и зависит от этого распределения.

Слова - орудия опасные. Созданные для нашей повседневной жизни, они обладают привычным значением лишь при известных ограниченных обстоятельствах, но Пит и человек с улицы склонны распространять их на более широкие сферы, нимало не заботясь о том, сохраняют ли те при этом твердую

опору в реальности или нет. Мы все не раз были свидетелями того, к каким тяжким последствиям приводит магия слов в сфере политики, где все слова имеют гораздо более расплывчатое значение и человеческие страсти нередко заглушают голос разума. Ученый обязан пробиваться сквозь туман абстрактных слов и достигать незыблемого скального основания реальности. Такого рода работа особенно тяжела,

как мне кажется, в  
экономических науках, где  
и поныне требуется  
затрачивать большие  
усилия, чтобы жить в  
соответствии с этим  
принципом. Так обстоит или  
должно обстоять дело во  
всех науках, но физикам и  
математикам пришлось  
применять этот принцип к  
самым фундаментальным  
понятиям, где  
догматическое  
сопротивление особенно  
сильно, и поэтому  
следование этому принципу

стало их второй натурой. Например, первый шаг в объяснении смысла теории относительности всегда сопряжен с необходимостью пошатнуть догматическую веру в незыблемость временных разграничений – прошлого, настоящего и будущего. Невозможно применять математику, пока слова затемняют реальность.

Я вновь обращаюсь к теории относительности как к иллюстрации первого



важного шага,  
предшествующего  
математическому анализу,  
шага, совершаемому под  
девизом "мыслить  
конкретно". Первооснову  
таких слов, как прошлое,  
настоящее и будущее,  
относящихся к времени, мы  
усматриваем в том, что  
более осязаемо, чем время,  
а именно, в причинной  
структуре Универсума.  
События локализованы в  
пространстве и во времени;  
событие малой  
протяженности происходит в

точке пространства-времени, или в мировой точке "здесь-теперь". Если ограничиться событиями на некоторой плоскости  $E$  (рис. 1), то их развитие во времени – своего рода расписание – можно изобразить в виде трехмерной диаграммы с горизонтальной плоскостью  $E$  и вертикальной осью  $t$ , по которой отложено время. Каждая мировая точка представлена на диаграмме точкой, движение тела небольших размеров –

мировой линией,  
распространение света со  
скоростью  $c$ , испускаемого  
источником из мировой  
точки  $O$ , – прямым круговым  
конусом с вертикальной  
осью и вершиной в точке  $O$   
(световым конусом) .

Активное будущее для  
данной мировой точки  $O$   
(здесь–теперь) содержит  
все те события, на которые  
еще может повлиять то, что  
происходит в точке  $O$ , а ее  
пассивное прошлое содержит  
все те мировые точки, из  
которых можно

воздействовать на точку 0,  
послав ей сигнал. Лишь  
после этого можно сделать  
второй шаг – шаг  
абстракции, когда  
интуитивные представления  
заменяются чисто знаковой  
конструкцией.

Около месяца назад я и  
мальчик лет двенадцати по  
имени Пит отправились  
побродить в окрестностях  
горы Лонгз Пик в

Национальном парке Роки Маунтин. Взглянув на вершину. Пит сообщил мне, что высоту ее недавно уточнили и она составляет 14255 футов вместо 14254 по прошлогодним измерениям. Я на миг приостановился, пытаюсь понять, какой смысл вкладывает в эти слова Пит, а затем попытался просветить его с помощью чего-то вроде сократовского диалога. Но я не стал мучить своего юного друга, и те

объяснения, от которых воздержался тогда, изложу вам сейчас. Когда говорят о высоте горной вершины, имеют в виду ее высоту над уровнем моря. Но у подножия горы Лонгз Пик никакого моря нет. Поэтому мы мысленно продолжаем уровень моря под сушей континентов. Но как построить идеальную замкнутую поверхность - геоид, - совпадающую на части земного шара с поверхностью океанов? Если бы океаническая

поверхность имела строго сферическую форму, то ответ был бы прост. В действительности, однако, ничего этого нет. И здесь нам на помощь приходит динамика. С точки зрения динамики поверхность моря — это поверхность постоянного потенциала  $\varphi = \varphi_0$ ; говоря более точно,  $\varphi$  означает гравитационный потенциал Земли, и, следовательно, разность значений  $\varphi$  в двух точках  $P$  и  $P'$  равна работе, которую необходимо совершить над

телом единичной массы, чтобы переместить его из точки  $P$  в точку  $P$ . Именно поэтому геоид разумнее всего задать динамическим уравнением  $\Delta\varphi = 0$ . Если это постоянное значение потенциала  $\varphi$  соответствует нулевой высоте над уровнем моря, то любую другую высоту естественно определить, указав соответствующее ей значение гравитационного потенциала  $\varphi$ . Тогда вершину  $P$  естественно назвать более высокой, чем



вершина  $P'$ , если при перемещении из  $P$  в  $P'$  достигается выигрыш в энергии. Геометрическое понятие высоты заменяется динамическим понятием потенциала или энергии. Даже для такого опытного альпиниста, как Пит, этот аспект, наверное, наиболее важен: чем выше вершина, тем больше - *ceterisparibus* [при прочих равных условиях - лат.]<sup>6</sup> - механических усилий требует восхождение на нее. Как показывает более

тщательное рассмотрение, потенциал почти во всех отношениях более точно отвечает существу дела. Например, барометрический метод измерения высоты основан на том, что при заданной постоянной температуре потенциал пропорционален логарифму атмосферного давления, какова бы ни была природа гравитационного поля. Следовательно, атмосферное давление, вообще говоря, позволяет измерять потенциал, а не высоту. Ни

у кого из тех, кто знает, что Земля круглая и вертикальное направление не является внутренним геометрическим свойством пространства, а определяется направлением силы тяжести, не вызовет удивления необходимость отказа от геометрического понятия высоты в пользу более конкретного динамического понятия потенциала. Разумеется, связь с геометрией существует: если область пространства настолько

мала, что силу тяжести в ней везде можно считать постоянной, то направление вертикали фиксировано и разности потенциалов, пропорциональные разностям высот, измеренным в этом "здесь-теперь", не могут изменить что-либо, лежащее вне активного будущего; все события, о которых и "здесь-теперь" могу узнать либо из прямых наблюдений, либо из любых других сообщений, с необходимостью принадлежат пассивному прошлому. Слова

"прошлое" и "будущее"  
получают при этом  
причинную интерпретацию и  
выражают нечто весьма  
реальное и важное –  
причинную структуру мира.

Новое открытие, положенное  
в основу теории  
относительности, состоит в  
том, что ни один эффект не  
может распространяться  
быстрее света.

Следовательно, если мы  
раньше считали, что  
граница между активным  
будущим и пассивным

прошлым представляет собой сечение, которое определяется настоящим, - горизонтальную плоскость  $t = 0$ , проходящую через мировую точку  $O$ , то Эйнштейн научил нас, что активное будущее ограничено световым конусом, обращенным раструбом вперед, а пассивное прошлое - его продолжением назад. Активное будущее отделено от пассивного прошлого частью мира, заключенной между этими конусами, и с

этой частью мира я,  
находясь "здесь-теперь",  
не имею никакой причинной  
связи. В этом новом  
понимании причинной  
структуры Вселенной  
заключено важное  
положительное содержание  
теории относительности.  
Обсуждая различные  
интерпретации простого  
вопроса, являются ли два  
человека, скажем, Билл на  
Земле и Боб на Сириусе,  
современниками и означает  
ли это, что Билл может  
послать сигнал Бобу, или

что Боб - послать сигнал Биллу, или же что Билл может установить связь с Бобом, послав ему сигнал, и получить ответ и т.д., мне нередко удавалось приучить своего слушателя мыслить в терминах причинной, а не более привычной временной структуры. Тем не менее, как только я начинал говорить о том, что причинная структура не означает разбиение на горизонтальные слои  $t = \text{const}$ , но что активное



будущее и пассивное  
прошлое имеют вид конусов,  
разделенных зазором, так  
часть аудитории лишь с  
трудом могла уловить, к  
чему я клоню, Однако  
каждый добросовестный  
слушатель мог бы задать  
мне вопрос: "Вот Вы  
чертите на доске некоторую  
фигуру и используете  
наглядные образы; как  
далеко простирается  
используемая Вами аналогия  
и какая голая истина стоит  
за ней?". Авторы научно-  
популярных книг и

журналисты, когда им приходится иметь дело с физикой, позволяют себе прибегать к различным сравнениям; беда, однако, состоит в том, что они оставляют читателя в неведении относительно того, насколько точно их остроумные аналогии передают суть дела; поэтому они чаще сбивают читателя с толку, чем проясняют вопрос. В нашем случае нельзя не признать, что наш чертеж – не более, чем наглядный образ,

"картинка". Впрочем, контуры реальности проступят на ней, как только мы заменим интуитивное пространство, в котором построены наши чертежи, конструкцией, состоящей из одних знаков

"Тогда слова о том, что наш мир представляет собой четырехмерный континуум, из фигурального оборота речи превращаются в утверждение, которое а буквальном смысле является истинным. Делая второй шаг, математик обращается

к абстракции, и это именно тот пункт, где неспециалист чаще всего перестает понимать его: интуитивная картина должна уступить место знаковой конструкции. "Своими геометрическими, а позднее чисто символическими конструкциями, — говорит Андреас Шпайзер, — математика стягивает оковы языка, и тот, кто знает, какой гигантский труд вкладывается в этот процесс, и знаком с его неизменно повторяющимися

поразительными успехами,  
не может не ощутить, что  
математика наших дней в  
своей сфере  
интеллектуального мира  
более эффективна, чем  
современные языки в их  
жалком состоянии и даже  
музыка в своих областях"<sup>7</sup>.  
Большую часть времени,  
отведенного для моего  
выступления сегодня, я  
хочу затратить на то,  
чтобы попытаться дать вам  
представление о том, что  
такое магия знаковой  
конструкции.

Для этого мне придется  
начать с самого простого и  
в то же время в известном  
смысле наиболее глубокого  
примера: с натуральных,  
или целых положительных,  
чисел, при помощи которых  
мы пересчитываем предметы.  
Знаками, которые мы будем  
здесь использовать, служат  
штрихи, наносимые один за  
другим. Пересчитываемые  
предметы могут исчезнуть –  
"испариться, растаять,  
обратиться в росу"  
[Архимед, Сочинения] 8, но  
запись об их числе мы

сохраним. Более того, с помощью вполне конструктивной процедуры мы можем определить, какое из двух чисел, изображенных с помощью этих знаков, больше; для этого каждому знаку из одного набора ставится в соответствие партнер из другого набора, и так штрих за штрихом. Такое сравнение позволяет обнаружить различия, которые мы не в состоянии установить прямым наблюдением, в большинстве

случаев не позволяющим отличить друг от друга даже такие небольшие числа, как 21 и 22. Мы настолько привыкли к чудесам, творимым числовой символикой, что перестали удивляться. Но все это – не более чем прелюдия к собственно математическому шагу. Решая вопрос о том, какие числа могут встретиться нам при подсчете реальных предметов, мы не полагаемся на случай, а порожаем открытую



последовательность всех возможных чисел; ее первый член равен 1 (или 0), а каждый последующий получается прибавлением к любому уже построенному символу числа  $n$  еще одного штриха, что и позволяет совершить переход к следующему числу  $n'$ . Как я неоднократно говорил, существующее при этом проектируется на фундамент возможного, точнее, на многообразие возможного, развертывающееся путем итерации и простирающееся

в бесконечность. Какое бы число  $n$  ни было задано, мы всегда может перейти от него к следующему числу  $n'$ . "Последнего числа не существует" (Numbersgoon). Эта интуиция возможности "всегда увеличить на единицу" "открытой счетной бесконечности" — лежит в основе всей математики. Именно она дает нам простейший пример того, что я называл априорной обозримостью области изменения. В соответствии с процессом порождения

целых чисел функции аргумента, пробегающего все целые числа  $n$ , должны быть определены с помощью так называемой полной индукции, и аналогичным образом следует доказывать утверждения, справедливые при всех  $n$ . Принцип умозаключения с помощью полной индукции состоит в следующем. Для доказательства того, что каждое число  $n$  обладает некоторым свойством  $V$ , достаточно удостовериться

в правильности двух вещей  
– того, что:

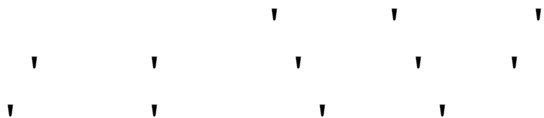
1) 0 обладает этим  
свойством;

2) если  $n$  – любое число,  
обладающее свойством  $V$ , то  
следующее за ним число  $n'$   
также обладает свойством  
 $V$ .

Практически невозможно – и  
было бы бесполезно –  
выписывать в виде набора  
штрихов символ числа 1012,  
которое европейцы называют

биллионом, а американцы - тысячей биллионов. Тем не менее мы говорим о расходах на нашу военную программу, превышающих 1012 центов, а астрономы имеют дело с еще большими числами, чем финансисты. В июльском номере журнала "Нью-Йоркер" была опубликована следующая карикатура. Муж и жена за завтраком просматривают газету. "Эндрью, сколько это будет - семьсот биллионов долларов?" Вопрос действительно

глубокий и серьезный,  
милостливая государыня!  
Замечу, что, лишь проходя  
через бесконечность, мы  
можем придать некий смысл  
столь большим числам. 12  
есть сокращенное  
обозначение для



$$\begin{array}{l} 1012 = \\ 10.10.10.10.10.10.10.10 \\ 10. 10. 10. 10 \end{array}$$

и его невозможно понять,  
не определив  
предварительно функцию 10.  
и для всех  $p$ , и для этого  
необходимо воспользоваться  
следующим определением с  
помощью полной индукции:

$$10 \times 0 = 0,$$

```
10 x n' = (10 ·x n)
' ' ' ' ' ' ' ' ' ' ' .
```

Штрихи образуют явно  
выписанный символ числа  
10, и, как и прежде,  
каждый штрих означает

переход к следующему числу. Излюбленная тема индийской и, в частности буддийской, литературы представление гигантских чисел в изобретенной индийцами десятичной системе счисления, т.е. запись их путем комбинации сумм, степеней и произведений. Упомяну также сочинение Архимеда "Псаммит" ("Исчисление песчинок")<sup>9</sup> и "тело "гутолплекс", упоминаемое в последней популярной книге профессора Казнера



"Математика и  
воображение"10.

Наша концепция  
пространства, в известной  
мере аналогичная нашим  
представлениям о  
натуральных числах,  
основана на конструктивном  
задании всех возможных  
местоположений (places).  
Рассмотрим металлический  
диск, лежащий на плоскости  
E. Различные  
местоположения на диске  
можно маркировать  
inconcrete, например,

выцарапывая на поверхности диска крестики. Но если на плоскости  $E$  проведены две оси координат и задана единица длины, то идеальная маркировка оказывается возможной на плоскости и вне диска путем указания численных значений двух координат рассматриваемого местоположения. Каждая координата принимает значения из построенной *a priori* области действительных чисел. Именно так поступают

астрономы, используя  
твердь земную как базу для  
измерения глубин мирового  
пространства. Какая  
замечательная сила  
воображения понадобилась  
грекам, чтобы впервые  
построить тени, которые  
отбрасывают освещаемые  
Солнцем Земля и Луна в  
космическое пространство,  
и тем самым объяснить  
солнечные и лунные  
затмения! Анализируя  
континуум, каковым  
является пространство, мы  
применим несколько более

общий подход, чем измерение координат, и примем топологическую точку зрения, согласно которой два континуума, получающиеся один из другого путем непрерывной деформации, совпадают. Последующую часть моего рассказа можно рассматривать поэтому и как краткое введение в такой важный раздел математики, как топология.

Знаками, позволяющими локализовать точки на

одномерном континууме  
прямой, служат  
действительные числа. Я  
предпочитаю рассматривать  
замкнутый одномерный  
континуум – окружность.  
Наиболее важное  
утверждение относительно  
континуума состоит в том,  
что он всегда допускает  
разбиение на части. Все  
точки континуума можно  
уловить, накинув на него  
сеть разбиения и измельчая  
ее ячейки путем повторения  
*ad infinitum* определенного  
процесса разбиения. Пусть

$S$  - какое-то разбиение окружности на некоторое число (например, на  $l$ ) дуг. От разбиения  $S$  перейдем к разбиению  $S'$ , произведя так называемое нормальное подразбиение: разделим каждую из дуг на две части. Тогда число дуг в разбиении  $S'$  будет равно  $2l$ . Обходя окружность в определенном направлении (задав ориентацию), мы можем различать части дуг по тому порядку, в котором они нам встречаются, маркируя их с помощью  $0$  и

1; более подробно: если дуга обозначена символом  $\gamma$ , то две ее части обозначаются через  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ . Начнем с разбиения  $S_0$  окружности на две дуги  $+$  и  $-$ ; с точки зрения топологии каждая из них представляет собой клетку, т. е. эквивалентна отрезку. Повторяя процесс нормального подразбиения, мы приходим к разбиениям,  $S_0', S_0'', \dots$  следя за тем, чтобы измельчение дуг все время происходило по всей окружности. Если бы

мы не отказались от использования метрических свойств, то можно было бы сказать, что при нормальном подразбиении каждая дуга делится на две равные части. Поскольку мы не вводим такого ограничения, данный процесс на самом деле содержит изрядную долю произвола. Тем не менее комбинаторная схема примыкания дуг, возникающих при очередном разбиении, и нескончаемого измельчения дуг вполне



определенна и единственна. Только об этой символической схеме и заботятся математики. В наших обозначениях дуги, возникающие при последовательных разбиениях, удастся свести в единый каталог, присваивая им символы вида  $+$ ,  $011010001$ .

Перед запятой ставится знак плюс или минус, а на каждом месте после запятой – знаки 0 или 1. Нетрудно

видеть, что мы получаем хорошо известные двоичные (или десятичные) дроби. Точку на окружности ухватывает бесконечная последовательность дуг, возникающих при продолжающихся разбиениях, причем каждая дуга получается из предыдущей путем выбора одной из двух частей, на которые эта дуга была разделена при очередном нормальном разбиении; таким образом, точка окружности однозначно определяется

бесконечной двоичной дробью.

Попытаемся теперь проделать нечто аналогичное с двумерными континуумами, например, с поверхностью сферы или тора. На рис. 2, 3 показано как накинуть

очень грубые сети на сферу и тор; одна из этих сетей состоит из двух, другая - из четырех ячеек: сфера разделена на верхнее и нижнее полушарие

экватором, тор склеен из четырех прямоугольных лоскутов. Ячейки представляют собой двумерные клетки, или, кратко, 2-клетки, топологически эквивалентные круглому диску. Комбинаторное описание упрощается, если ввести вершины и ребра разбиения – 0-клетки и 1-клетки. Обозначим вершины и ребра произвольными знаками и на их языке для каждой 2-клетки составим перечень ограничивающих ее

1-клеток, а для каждой 1-клетки перечень ограничивающих ее 0-клеток. Мы получим топологическую схему  $S_0$ . В наших двух примерах эта схема выглядит следующим образом [стрелка ">" означает "ограничена"]:

Сфера     $A \ ? \ ?, \ ??. \qquad A?$   
 $? \ ?, \ ??. \qquad ? \ ? \ ?, \ ??. \qquad ?? \ ?$   
 $a, \ a?$

Тор     $A > \ ?, \ ?, \ ?, \ ?. \qquad A?$   
 $? \ ?, \ ?, \ ??, \ ??. \qquad B \ ? \ ?,$   
 $?, \ ?, \ ?. \qquad B? \ ? \ ?, \ ?, \ ??,$

$??.$       $? > c, d.$       $? > c,$   
 $d.$       $? > c, d.$       $? > c, d.$   
 $? > c, c.$       $?? ? c, c.$       $?$   
 $> d, d.$       $?? ? d, d.$

Исходя из этого разбиения,  
 рассматриваемого как  
 первоначальное, станем  
 уменьшать ячейки при  
 помощи итерации  
 универсального процесса  
 нормального подразбиения:  
 в каждой 1-клетке  $?$  =  
 abвыберем точку, которая  
 служит новой вершиной  $?$  и  
 делит 1-клетку на два  
 сегмента  $?a$  и  $?b$ ; в каждой

2-клетке  $A$  выберем точку  $A$  и разрежем клетку на треугольники, соединив только что созданную вершину  $A$  со старыми и новыми вершинами на 1-клетках (эти клетки образуют границу 2-клетки) линиями, которые проходят внутри 2-клетки. По аналогии с элементарной геометрией обозначим треугольники и их стороны соответствующими вершинами. На рис. 4 изображен пятиугольник до и после разбиения.

Треугольник  $A^?c$  ограничен  
 1-клетками  $?c, A^?, A^c$ ; 1-  
 клетка  $A^c$  ограничена  
 вершинами  $A$  и  $c$ . В  
 результате мы приходим к  
 следующему чисто  
 символьному описанию  
 процесса, посредством  
 которого из заданной  
 топологической схемы  $S$   
 получается подвергнутая  
 разбиению схема  $S'$ . Любой  
 символ  $e_2e_1e_0$ ,  
 составленный из символа 2-  
 клетки  $e_2$ , символа 1-  
 клетки  $e_1$  и символа 0-  
 клетки  $e_0$  из  $S$  (2-клетка



$e_2$  ограничена 1-клеткой  $e_1$   
 1-клетка  $e_1$  ограничена 0-  
 клеткой  $e_0$ ), соответствует  
 некоторой 2-клетке  $e_{\Gamma 2}$   
 разбиения  $S'$ . Эта 2-клетка  
 $e_{\Gamma 2} = e_2 e_1 e_0$   $S'$  разбиения  
 составляет часть 2-клетки  
 $e_2$  разбиения  $S$ . Символы  
 клеток разбиения  $S'$ ,  
 образующих границу любой  
 клетки, получаются из ее  
 символа при отбрасывании  
 любой из входящих в нее  
 букв. При итерации этого  
 комбинаторного процесса,  
 производимого над знаками,  
 исходная схема  $S_0$

порождает  
последовательность  
вторичных схем  $S_0', S_0'',$   
 $S_0''' \dots$  Нам остается лишь  
придумать, как составить  
систематический каталог  
частей, возникающих при  
последовательных  
разбиениях. Любую точку  
нашего континуума  
ухватывает  
последовательность

$e, e', e'', \dots;$

(2)

начинается она с 2-клетки  $e$  схемы  $S_0$ , а за клеткой  $e(n)$  схемы  $S(n)$  следует одна из 2-клеток  $e(n+1)$  схемы  $S(n+1)$ , на которую 2-клетка  $e(n)$  распадается при  $(n+1)$ -м разбиении.

(Строго говоря, наше описание следовало бы немного изменить, чтобы по достоинству отразить непрерывность континуума, но для нас сейчас достаточно и упрощенного

описания, которое  
приведено выше.) Мы твердо  
знаем, что не только  
каждую точку можно  
ухватить такого рода  
последовательностью  
(Евдокс), но и что  
произвольно построенная  
последовательность этого  
типа всегда ухватывает  
некоторую точку (Дедекинд,  
Кантор). Такие  
фундаментальные понятия,  
как предел, сходимости и  
непрерывность, возникли в  
русле этой математической  
конструкции.

Теперь мы подошли к  
решающему шагу  
математической абстракции:  
забудем о том, что  
означают наши символы.  
Математики имеют дело  
только с каталогом знаков;  
они ведут себя как человек  
в справочном отделе  
библиотеки, которого не  
интересует, какие книги  
или фрагменты интуитивно  
постигаемого многообразия  
запечатлены с помощью  
знаков каталога. Такой  
человек не обязательно  
ленив: есть немало

операций, которые можно  
выполнить, работая только  
с символами и не обращаясь  
непосредственно к вещам,  
которые они обозначают.  
Так, заменяя точки их  
знаками (2), математик  
превращает исходное  
многообразие в знаковую  
конструкцию, которую мы  
будем называть  
топологическим  
пространством  $\{S_0\}$ , потому  
что в ее основе лежит  
только схема  $S_0$ .

Детали несущественны;  
важно лишь то, что коль  
скоро задана исходная  
конечная символьная схема  
 $S_0$ , мы, следуя абсолютно  
жестким правилам знакового  
конструирования, переходим  
от  $S_0$  к  $S_0'$ , от  $S_0'$  к  $S_0''$   
и т. д. Идея итерации,  
впервые встретившаяся нам  
при построении натуральных  
чисел, и на этот раз  
играет решающую роль.  
Реализация знаковой схемы  
для заданного  
многообразия, например,  
для сферы или тора, как

схемы последовательных разбиений может произвольно варьировать в широких пределах, будучи ограничена лишь требованием: ячейки сети должны в конце концов всюду становиться бесконечно малыми. В этом пункте и тесно связанном с ним требовании, чтобы каждая 2-клетка была наделена топологической структурой круглого диска, я вынужден довольствоваться не вполне четкими формулировками. Но



математиков интересует не  
применение схемы или  
каталога к тому или иному  
заданному многообразию, а  
только схема сама по себе,  
лишенная каких бы то ни  
было неясностей. Более  
того, как мы сейчас  
убедимся, даже для физики  
такого рода применение не  
представляет особого  
интереса. Прodelанный нами  
путь от многообразия через  
разбиение к чистой  
символике продиктован  
исключительно  
эвристическими

соображениями.

Тот же подход, оперирующий только со знаками, позволяет строить не только 1-, 2-, но и 3-, 4-, 5-, ... мерные многообразия. В общем случае  $n$ -мерная схема  $S_0$  состоит из символов, называемых 0-, 1-, 2-, ...,  $n$ -клетками, и каждой  $i$ -клетке  $e_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ставит в соответствие некоторые  $(i - 1)$ -клетки, образующие, как принято говорить, границу клетки

еі. Ясно, каким образом этот процесс нормального разбиения переносится на общий случай. Для локализации событий (всех возможных "здесь-теперь") допустимо воспользоваться некоторой 4-мерной схемой; физические величины, изменяющиеся в пространстве и времени, суть функции точки, пробегающей соответствующее знаково-сконструированное 4-мерное топологическое пространство'' . В этом

смысле наш мир есть не что  
иное, как 4-мерный  
континуум. Причинную  
структуру, о которой  
говорилось выше,  
необходимо построить в  
среде этого 4-мерного  
мира, т.е. из символов,  
образующих наше  
топологическое  
пространство. Мы умышленно  
избрали топологический  
подход, поскольку только  
он позволяет достичь  
широты, достаточной для  
того, чтобы мы могли  
охватить одновременно

специальную и общую теорию относительности.

Специальная теория относительности рассматривает причинную структуру как нечто геометрическое, жесткое, заданное раз и навсегда, в общей же теории относительности эта структура обретает гибкость и зависимость от вещества – так же, как, например, электромагнитное поле.

Анализируя природу, мы расчленяем явления на простые элементы, каждый из которых изменяется в определенном диапазоне возможностей, диапазоне, который обозрим для нас *a priori* потому, что эти возможности мы строим *a priori* чисто комбинаторным образом из некоего чисто знаковой материала.

Многообразие точек пространства-времени является одним из конструктивных элементов природы, по-видимому,

наиболее важным. Мы  
разлагаем свет на пучки  
плоскополяризованного  
монохроматического света,  
обладающие несколькими  
переменными  
характеристиками; значения  
одной из таких  
характеристик длины волны  
– принадлежат знаково-  
сконструированному  
континууму действительных  
чисел. В силу априорности  
этой конструкции мы  
говорим о количественном  
анализе природы; я  
убежден, что слово

"количественный", если ему вообще можно придать какой-нибудь смысл, надлежит понимать в этом широком смысле. Мощь науки, как свидетельствует развитие современной техники, опирается на комбинацию априорных знаковых конструкций и систематического опыта в форме планируемых и воспроизводимых экспериментов (reactions) и соответствующих измерений. В качестве материала для своих



построений *a priori* Галилей и Ньютон использовали такие свойства реального мира, как пространство и время, которые они считали объективными в противоположность субъективным чувственным качествам, отвергаемым ими. Этим и объясняется важная роль, которая отводилась геометрическим фигурам в их физике. Должно быть, вы помните следующие строки из сочинения Галилея "Пробирных дел мастер"<sup>12</sup>,

где он говорит, что  
величественную книгу  
природы может читать лишь  
тот, "кто сначала научится  
постигать ее язык и  
толковать знаки, которыми  
она написана. Написана же  
она на языке математики, и  
знаки ее – треугольники,  
круги и другие  
геометрические фигуры, без  
которых человек не смог бы  
понять в ней ни единого  
слова". Впоследствии мы  
узнали, что ни один из  
элементов (features)  
нашего непосредственного

восприятия (observation), даже пространство и время, не может быть сохранен в мире претендующем на подлинную объективность, и в конце концов пришли к необходимости принять чисто знаковую комбинаторную конструкцию.

В то время как задание множества предметов однозначно определяет их число, мы видели, что схему разбиения  $S_0$  с последовательными этапами  $S_0, S_0, \dots$  можно ввести

на заданном многообразии многими способами, допускающими произвольное варьирование в довольно широких пределах. Однако вопрос о пригодности двух схем  $S_0$ ,  $S_0'$ ,  $S_0''$  и  $T_0'$ ,  $T_0''$  для описания одного и того же многообразия может быть решен математически: для этого необходимо и достаточно, чтобы существовали непрерывные взаимнооднозначные преобразования, отображающие друг на друга

два топологических пространства  $\{S_0\}$  и  $\{T_0\}$ ,  
– условие, из которого в конечном счете  
выкристаллизовывается определенное соотношение  
между двумя схемами  $S_0$  и  $T_0$ , называемое  
изоморфизмом. (Замечу кстати, что проблема  
установления в конечной комбинаторной форме  
критерия изоморфизма двух конечных схем принадлежит  
к числу знаменитых нерешенных математических  
проблем<sup>13</sup>.) Связь между

данным континуумом и его знаковой схемой неизбежно несет в себе понятие изоморфизма; без этого понятия и без понимания того, что изоморфные схемы следует рассматривать как отличающимся лишь второстепенными деталями – не более, чем конгруэнтные фигуры в геометрии, – математическое понятие топологического пространства было бы неполным. Кроме того, необходимо точно сформулировать условия,

которым должна  
удовлетворять каждая  
топологическая схема.  
Например, одно из таких  
условий требует, чтобы  
каждая 1 -клетка была  
ограничена ровно двумя 0-  
клетками.

Теперь я уже могу более  
ясно сказать о том, почему  
для физика - почти так же,  
как для математика, -  
безразличен конкретный  
способ применения  
определенной комбинаторной  
схемы последовательных

разбиений к тому  
континууму событий "здесь-  
теперь", который мы  
называем миром.

Разумеется, теоретические  
конструкции необходимо тем  
или иным способом  
сопоставить с наблюдаемыми  
фактами. Историческое  
развитие наших теорий,  
происходящее благодаря  
эвристическим  
рассуждениям, - это  
извилистый и  
многоступенчатый путь,  
ведущий от опыта к  
конструкции. Однако



систематическое изложение  
следует строить иначе:  
сначала разработать  
теоретическую схему, не  
делая попыток отождествить  
с помощью отдельных  
измерений входящие в ее  
знаки с пространственно-  
временными координатами,  
напряженностями  
электромагнитного поля и  
т.д., а затем как бы на  
одном дыхании дать  
описание того, каким  
образом вся эта система  
соотносится с наблюдаемыми  
фактами. Простейшим

примером, который мне удалось подыскать, служит наблюдаемое угловое расстояние между двумя звездами. Знаковая конструкция в среде 4-мерного мира, по которой теория определяет и предсказывает значение этого угла, включает в себя следующее: 1) мировые линии двух звезд, 2) причинную структуру универсума, 3) мировую точку наблюдателя и направление его мировой линии в момент наблюдения.

Непрерывная же деформация взаимно однозначное непрерывное преобразование – всей этой картины никак не сказывается на величине угла<sup>14</sup>. Изоморфные картины приводят к одним и тем же результатам во всем, что касается наблюдаемых фактов. Это не что иное, как принцип относительности в его наиболее общей форме. Произвол, возникающий при восхождении от данного многообразия к его конструкции, выражен в

этом принципе  
относительности для  
противоположной процедуры  
спуска, которой надлежит  
придерживаться при  
систематическом изложении  
теории.

До сих пор мы стремились  
описать, каким образом  
результат математического  
конструирования  
(construct) возникает в  
дистиллированном виде из  
данного нам сырого  
материала. Взглянем теперь  
на продукты этой

дистилляции глазами  
чистого математика. Один  
из продуктов  
последовательность  
натуральных чисел, другой  
общее понятие  
топологического  
пространства  $\{S_0\}$ , в  
которое превращается  
топологическая схема  $S_0$   
при последовательных  
разбиениях  $S_0, S_0', S_0''$   
... Наиболее важной  
отличительной особенностью  
в обоих случаях является  
итерация. Следовательно,  
все наши умозаключения

должны основываться на  
свидетельствах  
относительно совершенно  
ясного и понятного  
процесса, посредством  
которого порождаются  
натуральные числа, а не на  
каких-то принципах  
формальной логики,  
подобных силлогизму и др.  
Извлечение следствий не  
есть дело конструктивно  
мыслящего математика. В  
самом деле, его логические  
выводы (arguments) и  
суждения (propositions) -  
не более чем аккомпанемент

к его деятельности, к созданию конструкций. Например, мы перебираем последовательно, одно за другим, целые числа  $0, 1, 2, \dots$ , произнося поочередно "четно", "нечетно", "четно", "нечетно" и т. д., и, принимая во внимание возможность продолжения этой индуктивной конструкции сколь угодно далеко, формулируем общее суждение теории чисел: "Каждое целое число либо четно, либо нечетно".

Помимо идеи итерации (или последовательности целых чисел) мы постоянно используем идею отображения, или функции. Например, в только что рассмотренном примере мы определили по индукции функцию  $\varphi(n)$ , называемую четностью, где  $n$  принимает любые целочисленные значения, а  $\varphi$  может принимать только два значения – 0 (четно) и 1 (нечетно):

$$\varphi(0) = 0$$



$\varphi(n') = 1$ , если  $\varphi(n) = 0$ ,

$\varphi(n') = 0$ , если  $\varphi(n) = 1$ .

Такие структуры,  
рассматриваемые как  
топологические схемы,  
следует изучать в свете  
идеи изоморфизма.

Например, если требуется  
ввести оператор  $f$ ,  
переводящий топологическую  
схему  $S$  в топологическую  
схему  $f(S)$ , то  
рассматривать следует лишь

такие операторы, или функции  $f$ , для которых изоморфизм  $S$  и  $R$  влечет изоморфизм  $f(S)$  и  $f(R)$ .

До сих пор я всячески подчеркивал конструктивный характер математики. В нашей фактически существующей математике с ним соперничает неконструктивный аксиоматический метод. Его классическим прототипом являются аксиомы геометрии Евклида. Аксиоматический метод был весьма остроумно

использован Архимедом, а впоследствии Галилеем и Гюйгенсом при создании науки механики. При аксиоматическом методе все понятия определяются через несколько неопределяемых основных утверждений – аксиом, относящихся к основным понятиям. В прежние времена создатели теорий были склонны утверждать априорную очевидность своих аксиом, но это эпистемологический аспект проблемы, не представляющий интереса

для математика. Дедукция происходит в соответствии с принципами формальной логики, в частности, следует схеме силлогистического вывода. Подобное аксиоматическое изложение *more geometrico* [на геометрический манер – лат.] на протяжении долгого времени считалось идеалом любой науки. Спиноза предпринял попытку применить его к этике. Для математика безразличен смысл слов, выражающих основные понятия; любая их

подходящая интерпретация, т.е. такая, при которой аксиомы становятся истинами, одинаково пригодна, и все суждения аксиоматизируемой дисциплины при такой интерпретации сохраняют свою силу, поскольку все они являются логическими следствиями из аксиом. Так,  $n$ -мерная евклидова геометрия допускает еще одну интерпретацию, в которой точкам соответствуют распределения

электрических токов в цепи из ветвей, соединенных в определенных узлах.

Например, найти распределение токов, возникающее при заданных электродвижущих силах, приложенных к тем или иным ветвям цепи, означает решить геометрическую задачу о построении ортогональной проекции точки на некоторое линейное подпространство. В этом смысле математика рассматривает отношения в гипотетически-дедуктивном

плане, не связывая себя  
никакой конкретной  
материальной  
интерпретацией. Ее  
интересует не истинность  
аксиом, а лишь их  
непротиворечивость; в  
самом деле,  
противоречивость *a priori*  
лишала бы нас надежды  
когда-нибудь найти  
подходящую интерпретацию.  
"Математика – это наука,  
извлекающая необходимые  
следствия", – сказал Б.  
Пирс в 1870г., и это  
определение оставалось в

моде на протяжении  
нескольких десятилетий.  
Мне кажется, что оно  
содержит весьма скудную  
информацию относительно  
подлинной природы  
математики, и сейчас вы  
присутствуете при попытке  
охарактеризовать ее более  
полно. Специалисты по  
философии математики в  
прошлом неоднократно  
обсуждали аксиоматический  
метод, поэтому я не считаю  
необходимым излагать его  
более подробно, хотя и  
сознаю, что от этого мое



изложение становится  
несколько односторонним.

Все же я считаю своим  
долгом заметить, что с тех  
пор, как аксиоматический  
подход перестал быть  
излюбленной темой  
специалистов по  
методологии, его влияние  
распространилось с корнями  
на все ветви  
математического древа. Как  
мы уже успели убедиться, в  
основе топологии должен  
лежать полный перечень  
аксиом, определяющих

топологическую схему.  
Одним из простейших и  
наиболее фундаментальных  
понятий, задаваемых  
аксиоматически, может  
служить понятие группы,  
проникшее во все разделы  
математики. Алгебра с ее  
полями, кольцами и т.п. от  
вершины до основания  
пронизана аксиоматическим  
духом. Черты рисуемого  
мною портрета математики  
стали бы гораздо более  
четкими, если бы я не был  
так ограничен временем и  
мог хотя бы кратко

объяснить, что,  
собственно, означает  
каждое из произнесенных  
мною всемогущих слов  
"группа", "поле" и  
"кольцо", Я не буду  
пытаться сделать это, как  
не пытался приводить  
аксиомы, характерные для  
топологической схемы. Но  
такого рода понятия – как  
и родственные им привели  
к тому, что современное  
математическое  
исследование часто  
представляет собой искусно  
составленную смесь

конструктивной и  
аксиоматической процедур.

Взаимопроникновение этих  
процедур, возможно, и  
должно вызывать чувство  
удовлетворения. Однако  
велико искушение принять  
один из двух подходов в  
качестве подлинно, истинно  
математического образа  
мышления, а другому  
отвести вспомогательную  
роль; и если такой выбор в  
пользу конструкции или в  
пользу аксиомы –  
произведен, то принятую

точку зрения действительно  
удается развить  
последовательно и до  
конца.

Рассмотри сначала первую  
альтернативу. Приняв ее,  
мы должны считать, что  
математика есть прежде  
всего конструкция.

Используемые в математике  
системы аксиом лишь  
устанавливают границы  
области значений тех  
переменных, которые  
участвуют в конструкции.  
Поясню это утверждение

несколько подробнее на наших примерах причинной структуры и топологии. Согласно специальной теории относительности причинная структура задана раз и навсегда и поэтому может быть построена явно. Более того, эту структуру разумно строить вместе с соответствующей топологической средой, подобно тому, как, например, окружность вместе со своей метрической структурой получается путем

выполнении нормального разбиения – деления каждой дуги на две равные части. Однако в общей теории относительности причинная структура представляет собой нечто гибкое: она должна лишь удовлетворять некоторым аксиомам, выведенным из опыта и оставляющим достаточную свободу. Но по мере развития теории устанавливаются законы природы, связывающие гибкую причинную структуру с другими гибкими

физическими сущностями –  
распределением масс,  
электромагнитным полем и  
т. д., и эти законы, в  
которых гибкие явления  
выступают как переменные,  
в свою очередь оказываются  
результатом явных  
априорных теоретических  
построений. Релятивистская  
космология изучает  
топологическую структуру  
Вселенной в целом: открыта  
Вселенная или замкнута и  
т. д. Разумеется,  
топологическая структура  
не может быть столь же



гибкой, что и причинная структура, но прежде чем, опираясь на свидетельство опыта, решить, какая из топологических возможностей воплощается в нашем реальном мире, необходимо без помех обозреть все эти возможности, а для этого необходимо обратиться к топологии. В ее рамках топологическая схема ограничена лишь некоторыми аксиомами; но тополог, однако, извлекает из произвольных

топологических схем  
численные характеристики  
или устанавливает между  
ними соотношения общего  
рода; и делает он это  
опять-таки с помощью явной  
конструкции, в которую  
произвольные схемы входят  
в качестве переменных.  
Аксиомы, коль скоро они  
встречаются, служат в  
конечном счете для  
указания границ области  
значений переменных в явно  
построенных функциональных  
соотношениях.

Но довольно о первой альтернативе. Если принять противоположную точку зрения, то конструкция оказывается подчиненной аксиомам и дедукции, математика же предстает в виде системы аксиом, выбор которых зависит от соглашения, и выводимых из них заключений. В полностью аксиоматизированной математике конструкции отводится второстепенная роль: к ней прибегают при построении примеров,

образующих мост между чистой теорией и ее приложениями. Иногда существует лишь один пример, потому что аксиомы определяют некий объект однозначно или по крайней мере с точностью до изоморфизмов; в этом случае необходимость перехода от аксиоматической структуры к некоторой явной конструкции становится особенно настоящей. Еще более существенно отметить, что хотя

аксиоматическая система и не предполагает построения математических объектов, она, комбинируя и неоднократно используя логические правила, строит математические суждения. Действительно, извлечение следствий из заданных посылок происходит по определенным логическим правилам, которые со времен Аристотеля неоднократно пытались свести в единый полный перечень. Таким образом, на уровне суждений

аксиоматический метод есть  
чистейшей воды  
конструктивизм. В наши дни  
Давид Гильберт довел  
аксиоматический метод до  
горького конца, когда  
суждения математики,  
включая аксиомы,  
превратились в формулы и  
игра в дедукцию свелась к  
выводу из аксиом тех или  
иных формул по правилам,  
не учитывающим смысла  
формул. Игра в математику  
происходит в полном  
безмолвии, без единого  
слова, как игра в шахматы.

Слова нужны лишь для того, чтобы объяснить и сообщить "игрокам" правила; и, разумеется, все рассуждения о возможностях игры, например выяснение вопроса о ее непротиворечивости, также происходит в среде слов и апеллирует к данным опыта.

На этом этапе, коль скоро он достигнут, расхождение между явной конструкцией и неявным аксиоматическим определением затрагивает самые основы математики.

Конструктивный опыт перестает подкреплять принципы аристотелевской логики, когда эти принципы применяются к экзистенциальным или общим суждениям, относящимся к бесконечным областям, таким, как последовательность целых чисел или континуум точек. Если же мы примем во внимание логику бесконечного, то нам вряд ли удастся адекватно аксиоматизировать даже самые примитивные



процессы, например,  
переход  $n \rightarrow n'$ , т. е. от  
целого числа  $n$  к  
следующему числу  $n'$ . Как  
показал К. Гёдель, всегда  
найдутся конструктивно  
очевидные арифметические  
суждения, не выводимые из  
аксиом, как бы вы их ни  
формулировали, и в то же  
время аксиомы,  
безраздельно правящие  
всеми тонкостями  
конструктивной  
бесконечности, выходят  
далеко за пределы того,  
что может быть

подтверждено опытом. Нас не удивляет, что фрагмент природы, взятый в своем феноменальном изолированном бытии, бросает вызов нашему анализу с его незавершенностью и неполнотой; именно ради полноты, как мы видели, физика проецирует то, что дано, на то, что могло бы быть. Но удивительно другое: конструкция, порожденная разумом, — последовательность целых чисел, эта простейшая и

самая прозрачная для  
конструктивного ума вещь,  
– обретает аналогичную  
неясность и ущербность,  
если подходить к ней с  
позиций аксиоматики. Но  
тем не менее это факт,  
отбрасывающий зыбкий  
отблеск на взаимосвязь  
опыта и математики.

Несмотря на  
проницательность  
критической мысли – а  
может быть, благодаря ей –  
мы теперь гораздо меньше,  
чем наши предшественники,  
уверены в тех глубинных

устоях, на которых  
покоится математика.

Цель моей лекции состояла  
не в том, чтобы показать  
работу изобретательного  
математического интеллекта  
во всех его многообразных  
проявлениях – в  
математическом анализе,  
геометрии, алгебре, физике  
и т. д., хотя, нарисовав  
такую картину, я вызвал бы  
большой интерес: моя  
задача состояла в том,  
чтобы продемонстрировать  
источники, порождающие эти

проявления. Я понимаю, что за отведенный час мне удалось лишь в малой степени приблизиться к этой цели. В других областях знания даже краткие намеки встречают полное понимание, но в сфере математических идей такое, к сожалению, происходит редко. Я считал бы, что потерпел полную неудачу, если бы до вас не дошла по крайней мере следующая мысль: несмотря на почтенный возраст, математика отнюдь не

страдает прогрессирующим склерозом, вызванным все возрастающей сложностью; напротив, она продолжает активно жить, питаясь теми живительными соками, которые извлекают ее глубокие корни из разума и природы.